CONCOURS ALPHA

NOM --

Prénom --

EPREUVE DE
MATHEMATIQUES ET RAISONNEMENT LOGIQUE

Date de l'épreuve	27 avril 2013
Durée de l'épreuve	2h00
Candidats Concernés	Epreuve commune aux candidats de Terminale S, STI2D, ES, STL, STAV
Nombre de questions du sujet	60
Nombre de réponses nécessaires pour obtenir la note maximale	30

Présentation de l'épreuve

Cette épreuve comporte trois parties indépendantes que vous pouvez traiter dans l'ordre de votre choix :

- Partie 1 : 10 questions de raisonnement logique à traiter par tous les candidats
- Partie 2 : 10 questions de spécialité
  - Les candidats de terminale S répondront aux questions 11 à 20
  - Les candidats de terminale STI2D, STL, STAV répondront aux questions 21 à 30
  - Les candidats de terminale ES répondront aux questions 31 à 40
- Partie 3 : 20 questions sur la base d'un mini-cours présentant une notion nouvelle

Chaque candidat devra répondre correctement à 30 questions pour pouvoir obtenir la note maximale parmi :

- **10 questions de la partie 1 ;**
- **10 questions de la partie 2 (correspondant à son Bac d'origine) et**
- **20 questions de la partie 3.**

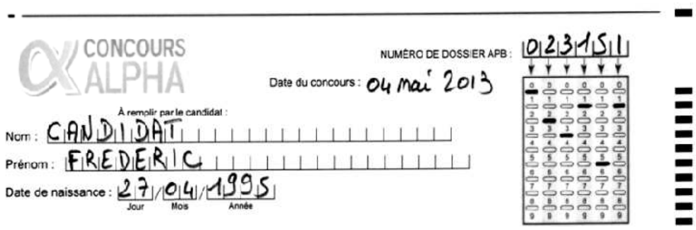
Consignes à lire avant de répondre aux questions

- Renseignez vos données personnelles en haut à droite de ce document. Vous devrez le restituer en fin d'épreuve.
- Renseignez vos données personnelles sur la grille réponse en respectant les instructions pour remplir la grille réponse.
- Avant de répondre, commencez par parcourir le sujet et identifier les questions auxquelles vous pourrez répondre.
- Il ne sera fourni aucun brouillon. Vous devrez utiliser les pages non imprimées de votre sujet (Verso de chaque page).
- N'attendez pas la dernière minute pour reporter les réponses aux questions sur votre grille réponse.
- **Pour chacune des questions, une seule réponse est exacte**.

Instructions importantes pour remplir la grille de réponse

Les réponses aux questions doivent être reportées sur la grille réponse jointe. Cette grille sera corrigée automatiquement. Afin que vos résultats puissent être pris en compte, nous vous demandons de respecter scrupuleusement les consignes suivantes :

- Utilisez un **stylo bille ou une pointe de feutre de couleur noire ou bleue**. Ne pas raturer, gommer ni utiliser d'effaceur. Ne pas froisser ou plier la grille réponse.
- Identité du candidat : remplir selon le schéma ci-dessous.

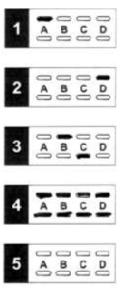


Attention, si votre **numéro APB comporte moins de 6 chiffres**, vous devrez le renseigner comme suit :

- Numéro APB à 4 chiffres : inscrire 2 « zéros » puis votre numéro APB.
  - Exemple N°APB 1234 -> inscrire 001234
- Numéro APB à 5 chiffres : inscrire 1 « zéro » puis votre numéro APB.
  - Exemple N°APB : 23456 -> inscrire 023456

- Renseigner vos réponses : **noircissez les cases** selon les consignes ci-dessous

- Pour modifier votre réponse, **ne pas raturer, ni gommer, ni utiliser d'effaceur**. Reportez vous à l'exemple ci-dessous



Réponse A

Réponse D

Annulation réponse B et choix réponse C

Annulation des réponses, abstention

Non réponse à la question, abstention

Barème

Vous devrez répondre à 30 questions correspondant à votre spécialité d'origine pour prétendre à l'obtention de la note maximale. Si vous répondez aux questions des autres spécialités, vos réponses ne seront pas prises en compte. Si vous répondez à plus de 30 questions, seules les 30 premières seront prises en compte.

- Toute bonne réponse vaut +1 point (plus 1 point)
- Toute réponse inexacte vaut -1 point (moins 1 point)
- Toute non-réponse vaut 0 point

Partie 1 : Raisonnement logique

- Les questions sont indépendantes
- Les questions sont à traiter par tous les candidats

Question 1.
Si trois chats attrapent trois souris en trois minutes, combien faut-il de chats pour attraper 60 souris en 60 minutes ?

a. 1 b. 3 c. 10 d. 20

Question 2.
Dans une animalerie, un employé a des soucis pour placer les perroquets. S'il met un perroquet par cage, il lui manque une cage mais s'il met deux perroquets par cage, une cage sera vide.
Combien possède-t-il de perroquets ?

a. 12 b. 8 c. 4 d. 3

Question 3.
4 amis doivent, dans le noir le plus total, franchir une passerelle. Cette dernière étant fragile, elle ne peut supporter au maximum que deux personnes simultanément. Ces 4 personnes ne disposent que d'une seule lampe torche sans laquelle ils ne peuvent traverser. Sylvain met 10 minutes pour traverser, Marie 5 mn, Sébastien 2mn et Stéphanie 1 mn.
Quel est le temps minimum (en mn) mis par le groupe pour franchir la passerelle?

a. 20 b. 19 c. 18 d. 17

Question 4.
Dans un village, un cinquième des habitants sont des agriculteurs, un quart du reste de la population travaille à l'usine ? Les 2100 autres habitants travaillent en ville.
Combien y a-t-il d'habitants au village?

a. 1200 b. 1700 c. 2600 d. 3500

Question 5.
Quatre poètes ont donné à la littérature française des œuvres de grande valeur.
Les poètes sont : Charles Baudelaire, Stéphane Mallarmé, Arthur Rimbaud, Paul Verlaine
Les années de naissance sont : 1821, 1842, 1844, 1854
Les lieux de naissance sont : Charleville, Metz, Paris

1. L'aîné des quatre n'est pas Mallarmé.
2. Rimbaud et Verlaine ne sont pas originaires de Paris.
3. Le poète de Metz n'est pas né le premier.
4. Rimbaud est né plus tard que Baudelaire.
5. Aucun des deux poètes originaires de Paris n'est né en 1844.

6. Mallarmé et Verlaine ne sont pas nés en 1854.
7. Verlaine n'est pas né à Charleville.

Trouvez l'année et le lieu de naissance de chaque poète.

a

Poètes	Charles Baudelaire	Stéphane Mallarmé	Arthur Rimbaud	Paul Verlaine
Années	1821	1842	1854	1844
Lieux	Paris	Paris	Charleville	Metz

b

Poètes	Charles Baudelaire	Stéphane Mallarmé	Arthur Rimbaud	Paul Verlaine
Années	1844	1821	1842	1854
Lieux	Metz	Paris	Paris	Charleville

c

Poètes	Charles Baudelaire	Stéphane Mallarmé	Arthur Rimbaud	Paul Verlaine
Années	1854	1842	1844	1821
Lieux	Charleville	Paris	Paris	Metz

d

Poètes	Charles Baudelaire	Stéphane Mallarmé	Arthur Rimbaud	Paul Verlaine
Années	1821	1844	1842	1854
Lieux	Charleville	Metz	Paris	Paris

Question 6.
Trois familles sont composées chacune de trois personnes : le père, la mère et un enfant.

Pères : Bernard, Boule, Barnabé
Mères : Carmen, Claire, Céline
Enfants : David, Denise, Didier

Chacun des membres suivants fait deux affirmations dont l'une est vraie et l'autre est fausse.
Denise : - Je suis la fille de Bernard.
- Je suis la fille de Claire.
Claire : - Je suis la mère de Denise.
- Je suis l'épouse de Barnabé.
Boule : - Je suis le père de Denise.
- Je suis l'époux de Carmen.
Carmen : - Je suis la mère de Didier.
- Je suis la mère de Denise.
La première affirmation de Denise est vraie. Reconstituer chaque famille.

a

Pères	Bernard	Boule	Barnabé
Mères	Céline	Carmen	Claire
Enfants	Denise	Didier	David

b

Pères	Bernard	Boule	Barnabé
Mères	Céline	Claire	Carmen
Enfants	Denise	David	Didier

c

Pères	Bernard	Boule	Barnabé
Mères	Carmen	Céline	Claire
Enfants	Didier	Denise	David

d

Pères	Bernard	Boule	Barnabé
Mères	Céline	Carmen	Claire
Enfants	David	Didier	Denise

Question 7.

Etape 1. Posons d'abord :

2=1+1

Etape 2. Multiplions chaque membre par (2-1) :

2x(2-1)=(1+1)(2-1)

Etape 3. Développons :

2x2-2x1=1x2+1x2-1x1-1x1

Etape 4. Passons 1x2 de droite à gauche :

2x2-2x1-1x2=1x2-1x1-1x1

Etape 5. Factorisons :

2x(2 – 1-1)=1x(2 – 1-1)

Etape 6. En simplifiant les deux membres par le facteur (2 – 1-1), il reste alors :

2=1

Où est l'erreur ?

a. Etape 3 b. Etape 4 c. Etape 5 d. Etape 6

Question 8.

Marie veut faire repeindre son mur. Elle connait trois amis qui pourraient le faire pour elle. Franck peut repeindre un mur en 1h, Jacques en 3h et Léon en 6h. Comme elle est pressée, elle les embauche tous les trois.

Combien de temps (en minutes) vont-ils mettre à eux trois?

a. 20 b. 60 c. 40 d. 90

Question 9.

Un sac de blé pèse les trois quarts d'un sac d'orge pesant 2kg de plus que le sac de blé.

Combien pèse le sac de blé?

a. 4 kg b. 6 kg c. 8 kg d. 12 kg

Question 10.

Trouver, parmi les solutions proposées, celle qui peut s'intégrer à la fois à l'ensemble vertical et à l'ensemble horizontal.

AOA				
PPS				
TEE				
?	AUT	OIF	YEV	EUW
OBO				

a. EIT
b. URU
c. EER
d. OUG

Partie 2 : Questions de spécialité

- Les candidats de Terminale S répondent aux questions 11 à 20
- Les candidats de Terminale STI2D, STL, STAV répondent aux questions 21 à 30
- Les candidats de ES répondent aux questions 31 à 40

Série S : répondre aux questions de 11 à 20

- Les questions sont indépendantes.

Question 11.

Dans R, l'inéquation $\ln(2 - x) + 1 \geq 0$

a. a pour ensemble de solutions $S = \left]-\infty ; 2 + \frac{1}{e}\right[$

b. n'a pas de solution

c. a pour ensemble de solutions $S = \left]-\infty ; 1 - \frac{1}{e}\right[$

d. a pour ensemble de solutions $S = \left]-\infty ; 2 - \frac{1}{e}\right[$

Question 12.

Soit f la fonction définie sur $I =]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'origine O.

a. La droite d'équation x = -1 est asymptote à la courbe Cf.
b. La droite d'équation x = 1 est asymptote à la courbe Cf.
c. La droite d'équation y = -1 est asymptote à la courbe Cf.
d. La limite de f en $+\infty$ *est égale à* 1

Question 13.

La somme $S = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{15}$ de termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ et de raison $\frac{1}{3}$ a pour valeur :

a. $\frac{3}{2}\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3}\right)^{16}\right]$

b. $\frac{3}{2}\left[\frac{1}{9} - \left(\frac{1}{3}\right)^{16}\right]$

c. $\frac{3}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^{16}\right]$

d. $\left[\frac{1}{9} - \left(\frac{1}{3}\right)^{16}\right]$

Question 14.

Soit E l'équation différentielle suivante : 2y'+y = 0. La solution de l'équation est :

a. $f(x) = ke^{-\frac{x}{2}}$

b. $f(x) = ke^{\frac{1}{2}+\frac{x}{2}}$

c. $f(x) = ke^{\frac{x}{2}}$

d. $f(x) = 1 + e^{-\frac{x}{2}}$

Question 15.
Soient z1, z2 et Z les nombres complexes définis par :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} \ , \quad z_2 = 1 - i \quad , \quad Z = \frac{z_1}{z_2}$$

a. $\arg(z_2) = \frac{\pi}{5}$

b. $|Z| = \sqrt{3}$

c. $|Z| = \sqrt{5}$

d. $\arg(Z) = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$

Question 16.
La solution de l'équation différentielle $y' + 8y = 4$ qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$ est

a. $\frac{1 - e^{-8x}}{2}$

b. $\frac{1 + e^{-8x}}{2}$

c. $\frac{e^{-8x}}{2}$

d. $\frac{1 + e^{8x}}{2}$

Question 17.
La limite de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ en x = 1 est égale à :

a. 1 b. 2 c. 3 d. 4

Question 18.
Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = -3x + \sin 2x$. Alors :

a. f est impaire sur R

b. f' est positive sur R

c. f est strictement croissante sur R

d. f est paire sur R

Question 19.
Le calcul de $I = \int_0^2 x e^{x^2} dx$ donne

a. e

b. $\frac{e^4}{2}$

c. $\frac{e^4 - 1}{2}$

d. $\frac{e^4 + 1}{2}$

Question 20.
La limite de $\frac{\sin x}{x} - \frac{e^{2x} - 1}{x}$ quand x tend 0 est

a. 1

b. 0

c. -1

d. $\frac{\pi}{2}$

Série STI2D, STAV, STL : répondre aux questions de 21 à 30

- Les questions sont indépendantes.

Question 21.
Le fonctionnement d'un appareil nécessite l'emploi de deux composants. On note F l'événement « le premier composant est défaillant » et G l'événement « le deuxième composant est défaillant ». On sait que P(F)=0,12 P(G) = 0,18 et
$P(F \cap G)= 0,07$. Alors

a. Les événements F et G sont incompatibles
b. Les événements F et G sont indépendants
c. La probabilité de l'événement « le premier composant fonctionne » est 0,7
d. La probabilité de l'événement « au moins l'un des deux composants est défaillant» est 0,23.

Question 22.
L'équation $\ln(x)+\ln(x-1)=\ln 6$ a comme solutions (dans R)

a. $x=-2$ b. $x=-2 \; et \; x=3$ c. $x=3$ d. $x=0$

Question 23.

La limite en $+\infty$ de $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+5}{(x+1)(x^2-8)}$ est

a. $+\infty$ b. 1 c. -1 d. 0

Question 24.
Quel est le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u} = (2,5,3)$ et $\vec{v} = (-1,2,0)$?

a. 0 b. 5 c. 12 d. 8

Question 25.
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite géométrique de raison 3 et de premier terme 2. Alors

a. La suite est décroissante
b. La somme des 50 premiers termes est 1000
c. $u_{n+1} - u_n = 4 \times 3^n$
d. La somme des 100 premiers termes est 2×10^6

Question 26.

La limite de $10\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$ est

a. 1/10 b. 0 c. 1/2 d. -1/2

Question 27.

Le système $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 15 \end{cases}$ admet comme solutions (dans $\mathbf{R}^2$)

a. $S = \{(6,3)\}$
b. $S = \{(1,3)\}$
c. $S = \{(2,3)\}$
d. $S = \{(0,3)\}$

Question 28.

On pose $I = \int_0^{\pi} \sin(3x)\, dx$ alors

a. $I = -\frac{\pi}{3}$
b. $I = \frac{2\pi}{3}$
c. $I = \frac{2}{3}$
d. $I = \frac{\pi}{6}$

Question 29.

La dérivée en 0 de $f(x) = e^{x^2+1}$

a. e
b. 1
c. 0
d. $e+1$

Question 30.

L'équation de la tangente en π de $f(x) = \cos(x + \pi/2)$ est :

a. $y = x - \pi$
b. $y = x$
c. $y = x + \pi$
d. $y = x + \pi/2$

Série ES : répondre aux questions de 31 à 40

- Les exercices sont indépendants.

Question 31.

A-t-on ?

a. $\int_1^4 \ln(t)dt = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln(t)dt - \int_2^4 \ln(t)dt$

b. $\int_1^4 \ln(t)dt = \int_1^2 \ln(t)dt + \int_2^4 \ln(t)dt$

c. $\int_1^4 \ln(t)dt = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln(t)dt + \int_2^4 \ln(t)dt$

d. $\int_1^4 \ln(t)dt = \int_1^2 \ln(t)dt - \frac{1}{2}\int_2^4 \ln(t)dt$

Question 32.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite arithmétique de premier terme -28 et de raison 5. Nous avons

a. $u_6 = 2$
b. $u_6 = -8$
c. $u_6 = 0$
d. $u_6 = -3$

Question 33.

L'équation $e^x = 12$

a. a pour solution $x = 0$
b. n'a pas de solution
c. a pour solution $x = \ln(12)$
d. a pour solution $x = 1/12$

Question 34.

Un supermarché commercialise des galettes de riz vendues en paquets pour lesquels :

- dans 5% des cas, l'emballage n'est pas intact,
- dans 70% des paquets d'emballage non intact, il y a au moins une galette de riz cassée,
- 90% des paquets d'emballage intact ne contiennent aucune galette de riz cassée.

On note E l'événement : «l'emballage n'est pas intact et aucune galette de riz n' est cassée ». On a

a. La probabilité de E est égale à 0,051
b. La probabilité de E est égale à 0,146
c. La probabilité de E est égale à 0,015
d. La probabilité de E est égale à 0,13

Question 35.

La somme S= 7+11+15+19+…+47 de termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 7 et de raison 4 a pour valeur

a. 256
b. 297
c. 298
d. 213

Question 36.

La fonction f réelle est définie pour x>0 par $f(x) = x^2 - 7 + \frac{\ln(x)}{7}$. Nous avons

a. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 7$

b. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

c. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

d. N'existe pas

Question 37.

Soit la fonction *h* définie pour tout x > 0 par $h(x) = x\ln(x)$

Pour tout *x > 0*, la dérivée *h'* de *h* est définie pour tout x>par :

a. $h'(x) = \ln(x)$ b. $h'(x) = 1 + \ln(x)$ c. $h'(x) = 1 - \ln(x)$ d. $h'(x) = h''(x)$

Question 38.

Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 2 et de variance 9. Alors

a. $Z = \frac{Y-2}{3}$ suit la loi normale $N(0,1)$

b. $Z = \frac{Y+2}{3}$ suit la loi normale $N(0,1)$

c. $Z = \frac{Y-2}{81}$ suit la loi normale $N(0,1)$

d. $Z = \frac{Y-2}{9}$ suit la loi normale $N(0,1)$

Question 39.

Quelle est la moyenne pour la variable aléatoire X de loi binomiale B(20 ; 0,35) ?

a. 3,5 b. 4,44 c. 13 d. 7

Question 40.

On pose $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ alors

a. $\mathrm{I} = -1/e$ b. $\mathrm{I} = 1/e$ c. $\mathrm{I} = -1/2$ d. $\mathrm{I} = 1/2$

Partie 3 :

Sous partie 1 : mini- cours

INJECTIVITE ET SURJECTIVITE

Donner un « premier » prénom à un nouveau-né, affecter une plaque d'immatriculation à chaque voiture achetée, créer à une personne une adresse mail de la forme : nom@.....fr, associer à chaque document le dossier qui le contient,… sont des exemples courants d'applications.
Une application est définie par la donnée d'un ensemble de départ E, d'un ensemble d'arrivée F et par l'association à chaque élément x de E d'une **unique** image y de F.

Pour étudier l'existence et l'unicité de solutions d'une équation, on utilise parfois des notions comme la surjectivité et l'injectivité.

I. Applications

Définition. Soient E et F deux ensembles.
On dit que f est une application de E dans F (et on note, $f : E \to F$) si à chaque élément x de E est associé un **unique** élément y de F, noté $f(x)$.

Notations et appellations usuelles:
Une application f de E dans F est souvent notée par :

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- E s'appelle l'ensemble de départ de l'application f
- F s'appelle l'ensemble d'arrivée de l'application f
- Pour $x \in E$, $f(x)$ s'appelle l'image de x par f
- Si $b \in F$ et **s'il existe** un $a \in E$ tel que $b = f(a)$:
  a est appelé un antécédent de b par f.
  C'est-à-dire si $b \in F$, b admet un antécédent par f $\Leftrightarrow$ il existe $a \in E, b = f(a)$

- Chercher l'antécédent d'un élément $b \in F$, revient à résoudre l'équation :
  (*) $x \in E$ / $b = f(x)$
  - Si l'équation (*) admet une solution, alors b admet un antécédent par f.
  - Si l'équation (*) n'a pas de solution, alors b n'admet pas d'antécédent par f.

Exemples

1) La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ car 0 n'a pas d'image mais f est une application de $\mathbf{R}^*$ dans $\mathbf{R}$.

2) En général, une fonction numérique f est une application de D_f dans $\mathbf{R}$ où D_f désigne l'ensemble de définition de f .

3) On considère l'application, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par : pour tout $x \in \mathbf{R},\ f(x) = x^2$

- -1 n'a pas d'antécédent par f , car l'équation : $x \in \mathbf{R}$, $-1 = x^2$ n'a pas de solution puisque pour tout $x \in \mathbf{R},\ x^2 \geq 0$ et $-1 < 0$.

- 2 admet deux antécédents par f , car en résolvant l'équation : $x \in \mathbf{R}, 2 = x^2$
  on a : ($x \in \mathbf{R}, 2 = x^2$) $\Leftrightarrow$ ($x = -\sqrt{2}$ *ou* $x = \sqrt{2}$)
  d'où $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ sont les deux antécédents de 2 par f

4) On considère l'application, $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ définie par : pour tout $x \in \mathbf{N},\ f(x) = x^2$

L'entier 4 admet **un unique** antécédent par f , car en résolvant l'équation :
$x \in \mathbf{N}$, $4 = x^2$, on a : ($x \in \mathbf{N}$, $4 = x^2$) $\Leftrightarrow$ ($x = 2$)

II. Injection, surjection, bijection

- **Injection**

Définition. Soit $f : E \to F$ une **application**.
f est dite injective de E dans F si :
Pour tout $x \in E$ et $y \in E$ on a $\big(f(x) = f(y) \big) \Rightarrow (x = y)$
c'est-à-direpour tout $x \in E$ et $y \in E$ on a : $(x \neq y) \Rightarrow \big(f(x) \neq f(y) \big)$

Remarque.
Pour montrer que f n'est pas injectivede E dans F , il suffit de trouver :
$x \in E$ et $y \in E$ tels que $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$

Exemples

1) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application définie par : pour tout $x \in \mathbf{R},\ f(x) = |x|$
f n'est pas injective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ car $-1 \neq 1$ et $f(-1) = f(1)$

2) Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ l'application définie par : pour tout $x \in \mathbf{C},\ f(x) = 2x + 1$
f est-elle injective de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$?
Soient $x \in \mathbf{C}$ et $y \in \mathbf{C}$ tels que $f(x) = f(y)$ a-t-on $x = y$?
On a : $f(x) = f(y) \Leftrightarrow 2x + 1 = 2y + 1 \Leftrightarrow 2x = 2y \Leftrightarrow x = y$ car $2 \neq 0$
Conclusion : pour tout $x \in \mathbf{C}$ et $y \in \mathbf{C}$, on a : $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
Donc f est injective de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.

3) $Id_E : E \to E$ l'application définie par : pour tout $x \in E,\ Id_E(x) = x$
On a : Id_E est une application injective de E dans E .

En particulier si $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ est l'application définie par : pour tout $x\in\mathbf{R},\ f(x)=x$
alors f est injective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Théorème. Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

1) Si f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ alors f est injective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
2) Si f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$ alors f est injective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Exemple.
Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ l'application définie par : pour tout $x\in\mathbf{R},\ f(x)=2x+\sin(x)$
Etudions l'injectivité de f.
Soient $x\in\mathbf{R}$ et $y\in\mathbf{R}$ on a : $f(x)=f(y)\Leftrightarrow 2x+\sin(x)=2y+\sin(y)$.
Il n'est pas évident de montrer par des opérations usuelles que
$\left(\ 2x+\sin(x)=2y+\sin(y)\ \right)\Rightarrow x=y$
mais puisque f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$
(car pour tout $x\in\mathbf{R},\ f'(x)=2+\cos(x)$ d'où $f'(x)>0$) alors d'après le théorème précédent on a f est injective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$
d'où pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ on a : $\left(\ 2x+\sin(x)=2y+\sin(y)\ \right)\Rightarrow x=y$

- **Surjection**

Définition. Soit $f:E\to F$ une **application**.
f est dite surjective de E sur F si :
Pour chaque $y\in F$, il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$
c'est-à-dire **chaque élément de F admet au moins un antécédent par f dans E.**

Remarque.
Pour montrer que f n'est pas surjective de E sur F, il suffit de trouver un
$y_0\in F$ qui n'a pas d'antécédent par f dans E.
C'est-à-dire il suffit de trouver un $y_0\in F$ tel que l'équation : $x\in E$, $f(x)=y_0$ n'a pas de **solution dans** E.

Exemples
1) Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ l'application définie par : pour tout $x\in\mathbf{R},\ f(x)=|x|$
f n'est pas surjective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ car $(-1)\in\mathbf{R}$ et -1 n'a pas d'antécédent par f puisque l'équation $x\in\mathbf{R},\ f(x)=-1$ n'a pas de solution dans $\mathbf{R}$ car pour tout $x\in\mathbf{R},\ |x|\geq 0$ et $-1<0$
.

2) Soit $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ l'application définie par : pour tout $x\in\mathbf{C},\ f(x)=2x+1$
f est-elle surjective de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}$?
Soit $y\in\mathbf{C}$, cherchons (s'il existe) $x\in\mathbf{C}$ tel que $y=f(x)$
On a : $y=f(x)\Leftrightarrow y=2x+1\Leftrightarrow x=\dfrac{y-1}{2}$

Conclusion : Pour tout $y \in \mathbf{C}$, il existe $x \in \mathbf{C}$ (où $x = \frac{y-1}{2}$) tel que $y = f(x)$.

Donc f est surjective de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}$.

3) Soit E un ensemble non vide et $Id_E : E \to E$ l'application définie par : pour tout $x \in E,\ Id_E(x) = x$. On a : Id_E est une application surjective de E sur E.

5) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ l'application définie par : pour tout $x \in \mathbf{R},\ f(x) = |x|$

On a : f n'est pas injective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^+$ (car $-1 \neq 1$ et $f(-1) = f(1)$)

mais elle **est surjective** de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}^+$ (car tout élément $y \in \mathbf{R}^+$ a pour antécédent y par f)

- **Bijection**

Définition. Soit $f : E \to F$ une application.

f est dite bijective de E sur F si f est à la fois injective et surjective de E sur F

c'est-à-dire pour chaque $y \in F$, il **existe un unique** $x \in E$ tel que $y = f(x)$

donc si f est bijective de E sur F alors chaque élément $y \in F$ admet **unantécédent et un seul**par f.

Cela revient à dire que si f est une bijection de E sur F alors **pour chaqueélément** $y \in F$ **,** l'équation : $x \in E,\ f(x) = y$ admet **une unique solution** dans E.

Remarque

Pour montrer que f n'est pas bijective de E sur F, il suffit de montrer que f n'est pas injective de E dans F **ou** f n'est pas surjective de E sur F.

Exemples

1) Id_E est une application bijective de E sur E.

2) La représentation des mois du calendrier par leur numéro (exemple le mois de janvier par le n°1 et le mois de juin par le n°6) est une bijec tion entre l'ensemble des mois et l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 12\}$

3) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ l'application définie par :pour tout $x \in \mathbf{R},\ f(x) = |x|$ alors f n'est pas bijective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}^+$ car f n'est pas injective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^+$.

4) Soit $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}^*$ l'application définie par :pour tout $n \in \mathbf{N},\ f(n) = n+1$ alors f est bijective de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}^*$ car f est injective et surjective de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}^*$.

Donc **pour chaque** $m \in \mathbf{N}^*$, l'équation $n \in \mathbf{N},\ f(n) = m$, admetune unique solutiondans $\mathbf{N}$.

III. Propriétés des applications injectives, surjectives, bijectives

Propriétés 1. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1) La composition de deux applications injectives est une application injective c'est-à-dire : si f est injective de E dans F et g est injective de F dans G alors $(g \circ f)$ est injective de E dans G

2) La composition de deux applications surjectives est une application surjective c'est-à-dire : si f est surjective de E sur F et g est surjective de F sur G alors $(g \circ f)$ est surjective de E sur G

3) La composition de deux applications bijectives est une application bijective c'est-à-dire : si f est bijective de E sur F et g est bijective de F sur G alors $(g \circ f)$ est bijective de E sur G

Remarques.

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1) **En général** : **(**$(g \circ f)$ est injective de E dans G **)n'implique pas que (** g est injective de F dans G **)**

Exemple : Soient $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ définie par : pour tout $x \in \mathbf{R},\ g(x) = x^2$

et $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par : pour tout $x \in \mathbf{R},\ f(x) = \sqrt{x}$

On a : $g \circ f = Id_{\mathbf{R}^+}$ car pour tout $x \in \mathbf{R}^+,\ (g \circ f)(x) = g\left(\sqrt{x}\right) = x$, donc $(g \circ f)$ est injective de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$ mais g n'est pas injective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^+$.

2) **En général** : **(**$(g \circ f)$ est surjective de E sur G **)n'implique pas que (** f est surjective de E sur F **)**

Exemple : Soient $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ définie par : pour tout $x \in \mathbf{R},\ g(x) = x^2$

et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par : pour tout $x \in \mathbf{R},\ f(x) = \sqrt{|x|}$

On a : $g \circ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ est définie par : pour tout $x \in \mathbf{R},\ (g \circ f)(x) = |x|$ donc $(g \circ f)$ est surjective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^+$ mais f n'est pas surjective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

Propriétés 2. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1) Si $(g \circ f)$ est injective de E dans G alors f est injective de E dans F

2) Si $(g \circ f)$ est surjective de E sur G alors g est surjective de F sur G

Exemple

Soient $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux applications.

Si $(g \circ f)$ est bijective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ alors f est injective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et g est surjective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

En effet si $(g \circ f)$ est bijective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ alors $(g \circ f)$ est injective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et $(g \circ f)$ est surjective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$

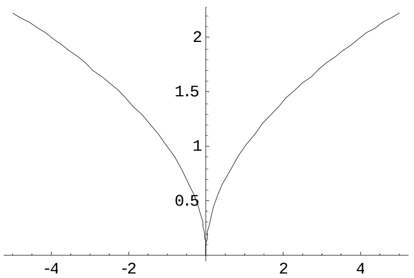
D'oùd'après la propriété 2, on a :alors f est injective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et g est surjective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

Sous Partie 2 : 20 questions à traiter par tous les candidats

- Les exercices et les questions sont indépendants
- Chaque exercice est composé d'une ou de plusieurs questions

Exercice 1.

On considère le graphe de l'application f



Question 41.

On a f est surjective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

a. vrai

b. faux

Question 42.

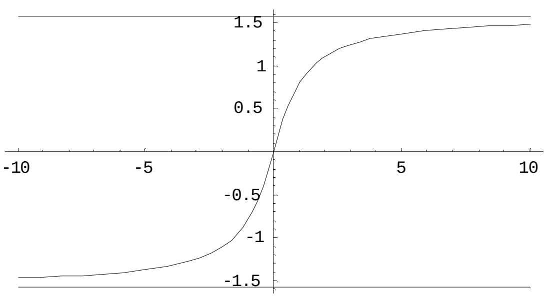
On a f est injective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

a. vrai

b. faux

Exercice 2.

On considère le graphe de l'application g



Question 43.

On a g est injective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

a. vrai

b. faux

Question 44.

a. g est surjective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$

b. g est surjective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}^+$

c. g est surjective de $\mathbf{R}$ sur $[-1.5\ ,\ 1.5]$

d. g est surjective de $\mathbf{R}$ dans $\left]-1.5\ ,\ 1.5\right[$

Exercice 3.

Soit f est une application $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

Question 45.

Si f est impaire alors f est injective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

a. vrai

b. faux

Question 46.

Si f est impaire alors f est surjective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

a. vrai

b. faux

Question 47.

Si f est paire alors f est injective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

a. vrai

b. faux

Question 48.

Si f est injective $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ alors f est bijective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$

a. vrai

b. faux

Question 49.

Si f n'est pas injective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ alors f est surjective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

a. vrai

b. faux

Exercice 4.

Soient E l'ensemble des élèves inscrits au Concours ALPHA et F l'ensemble des adresses mails.
Pierre GUIM, Pierre MAXI, Paul MAXI, Paul TAMI, Valérie MINOU, Richard GASOU, …sont inscrits au Concours ALPHA.
On considère l'application $f : E \to F$ qui à chaque élève associe une adresse mail définie par : pour tout $x \in E$, $f(x) = nom\ de\ x@concoursalpha.fr$
Donc $guim@concoursalpha.fr$ est l'adresse mail affectée à l'élève Pierre GUIM

Question 50.

f est injective de E dans F

a. vrai

b. faux

Exercice 5.

On considère l'application $f:[0,+\infty[\to\mathbf{R}$ définie par :

pour tout $x\in[0,+\infty[$, $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{2}$

Question 51.

a. 2 admet un antécédent par f dans $[0,+\infty[$

b. -1 admet un antécédent par f dans $[0,+\infty[$

c. 2 admet deux antécédents par f dans $[0,+\infty[$

d. -1 admet deux antécédents par f dans $[0,+\infty[$

Question 52.

f est injective de $[0,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$

a. vrai

b. faux

Question 53.

f est surjective de $[0,+\infty[$ sur $\mathbf{R}$

a. vrai

b. faux

Exercice 6.

On considère l' application $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ définie par :

pour tout $n\in\mathbf{Z}$, $f(n)=n+(-1)^n$

Question 54.

a. 2013 admet un antécédent par f dans $\mathbf{Z}$.

b. 2013 admet deux antécédents par f dans $\mathbf{Z}$.

c. L'équation : $n\in\mathbf{Z}, n+(-1)^n=2013$ n'a pas de solution dans $\mathbf{Z}$.

d. 2013 admet trois antécédents par f dans $\mathbf{Z}$.

Question 55.

f est surjective de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{Z}$

a. vrai

b. faux

Exercice 7.

On considère l' application $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ définie par :

pour tout $x\in\mathbf{R}$, $f(x)=2x-\cos(x)$

Question 56.

a. f est bijective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

b. f n'est pas injective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

c. f n'est pas surjective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

d. f n'est pas bijective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

Question 57.

a. 5 admet un antécédent par f dans $\mathbf{R}$.

b. 5 admet deux antécédents par f dans $\mathbf{R}$.

c. L'équation : $x\in\mathbf{R}, 2x-\cos(x)=5$ n' a pas de solution dans $\mathbf{R}$.

d. L'équation : $x\in\mathbf{R}, 2x-\cos(x)=0$ n' a pas de solution dans $\mathbf{R}$.

Exercice 8.

Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ une application

Question 58.

Si $f\circ f$ est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ alors on a :

a. f n'est pas injective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

b. f n'est pas surjective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$

c. f est bijective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$

d. f n'est pas bijective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$

Exercice 9.

Soient $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ et $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ deux applications

Question 59.

Si g est injective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et $g\circ f$ est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ alors on a :

g est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$

a. vrai

b. faux

Question 60.

Si g est surjective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}^+$ et $g\circ f$ est une bijection de $\mathbf{R}^+$ sur $\mathbf{R}^+$ alors on a :

g est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}^+$

a. vrai

b. faux

FIN DE L'EPREUVE