Geipi / polytech (Maths 2013)

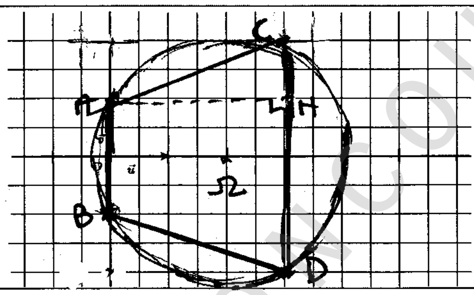
REPONSES A L'EXERCICE I

I-A-1-	$n = 10$ (nb d'essais)	$p = \frac{1}{4}$ (proba où la tasse déborde)
I-A-2-	$P_1 = P(X=0) = (1-p)^{10}$	$P_1 \simeq 5{,}63 \cdot 10^{-2}$
I-A-3-	$P_2 = P(X=1) = \binom{10}{1} p(1-p)^9$	$P_2 \simeq 1{,}88 \cdot 10^{-1}$
I-A-4-	$P_3 \simeq P(X \geqslant 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] \simeq 0{,}756$	
I-B-1-	$\mathbb{P}(T \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$ car $P(T \leq a) = \lambda \int_0^a e^{-\lambda t}\, dt$ $= -\left[e^{-\lambda t}\right]_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$	
I-B-2-	$\mathbb{P}(T > 90) = 1 - P(T \leq 90)$ $= e^{-0{,}02 \times 90} = e^{-1{,}8}$	$\mathbb{P}(T > 90) \simeq 0{,}165$
I-B-3-	$\lambda = -\frac{\ln 0{,}4}{120}$ $\quad \lambda \simeq 7{,}6 \cdot 10^{-3}$ car $P(T>120) = e^{-\lambda 120} = 0{,}4$ ssi $-120\lambda = \ln 0{,}4$ et $\lambda = -\frac{\ln 0{,}4}{120}$	
I-C-1-	Loi suivie par Z et paramètres de cette loi : loi normale centrée réduite (de moyenne nulle et d'écart type $\sigma = 1$)	
I-C-2-	$P_4 \simeq P(5{,}2 \leq X \leq 6{,}8) = P(-1 \leq Z \leq 1) \simeq 0{,}68$	

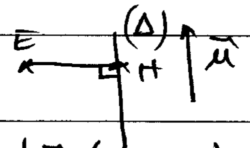
REPONSES A L'EXERCICE II

II-A-1-	$\frac{a(x+1)+b}{x+1} = \frac{ax+a+b}{x+1} = \frac{2x+5}{x+1}$ par identification, on a : $\begin{cases} a=2 \\ 2+b=5 \end{cases}$ soit $b=3$ $\boxed{a = 2}$ $\boxed{b = 3}$
II-A-2-	$L = 2+3\ln 2$ car $L = \int_0^1 2 + \frac{3}{x+1}\,dx = \left[2x + 3\ln(x+1)\right]_0^1$ $= 2+3\ln 2$
II-B-1-	$1 \le e^{\frac{x}{n}} \le e^{\frac{1}{n}}$ car $0 \le x \le 1$ d'où $0 \le \frac{x}{n} \le \frac{1}{n}$ car $n \geq 1$ d'où $e^0 \le e^{\frac{x}{n}} \le e^{\frac{1}{n}}$ car la fct expo est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$ et $1 \le e^{\frac{x}{n}} \le e^{\frac{1}{n}}$
II-B-2-a-	$L \le u_n \le Le^{\frac{1}{n}}$ car $f(x) \geq 0$ sur $[0;1]$ d'où $f(x) \le f(x)\,e^{\frac{x}{n}} \le f(x)\,e^{\frac{1}{n}}$ et du fait de la propriété du respect de l'ordre de l'intégrale, on a : $\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 f(x)e^{\frac{x}{n}}dx \le \int_0^1 f(x)e^{\frac{1}{n}}dx$ or $\int_0^1 f(x)dx = L$ et $\int_0^1 f(x)e^{\frac{1}{n}}dx = e^{\frac{1}{n}}\int_0^1 f(x)dx = e^{\frac{1}{n}} \times L$
II-B-2-b-	$(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} \times L = L$ et d'après le th. des Gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$
II-B-2-c-	$0 \le u_n - L \le L(e^{\frac{1}{n}} - 1)$ car $L \le u_n \le Le^{\frac{1}{n}}$ d'où $0 \le u_n - L \le Le^{\frac{1}{n}} - L$
II-C-1-	N représente le plus petit entier tel que : $L(e^{\frac{1}{n}} - 1) \le 10^{-5}$
II-C-2-	$\beta = 10^{-5}$

REPONSES A L'EXERCICE III

III-1-a-	$P(i) = i^4 - 6i^3 + 14i^2 - 6i + 13 = 1 + 6i - 14 - 6i + 13 = 0$ $\quad P(-i) = 0$
III-1-b-	$\boxed{c = -6}$ $\quad \boxed{d = 13}$ $\quad (z^2+1)(z^2+cz+d) = z^4 + cz^3 + (d+1)z^2 + cz + d = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 6z + 13$
III-1-c-	$\mathcal{S}_1 = \{3-2i, 3+2i\}$ car $z^2 - 6z + 13 = 0$ $\quad \Delta = -16 = (4i)^2$ $z_1 = \frac{6-4i}{2} = 3-2i$ $z_2 = \bar{z_1} = 3+2i$
III-1-d-	$\mathcal{S}_2 = \{-i, i, 3-2i, 3+2i\}$ $\quad z^2+1 = 0$ si $z = i$ ou $z = -i$
III-2-	
III-3-a-	$Z_1 = z_C - z_A = 3+i$ $\quad Z_2 = z_A - z_\Omega = -2+i$ $\quad Z_3 = z_C - z_\Omega = 1+2i$
III-3-b-	$\|Z_1\| = \|3+i\| = \sqrt{10}$ $\quad \|Z_2\| = \|-2+i\| = \sqrt{5}$ $\quad \|Z_3\| = \|1+2i\| = \sqrt{5}$
III-3-c-	$AC = \|Z_1\| = \sqrt{10}$ $\quad \Omega A = \|Z_2\| = \sqrt{5}$ $\quad \Omega C = \|Z_3\| = \sqrt{5}$ car
III-3-d-	$\widehat{A\Omega C} = \frac{\pi}{2}$ car D'après la réciproque du th. de pythagore, puisque $\Omega A^2 + \Omega C^2 = AC^2$ alors le triangle $A\Omega C$ est rectangle en Ω
III-3-e-	Le triangle $A\Omega C$ est isocèle et rectangle en Ω
III-4-a-	Utiliser la figure de **III-2-**
III-4-b-	$I = \Omega$ $\quad r = \sqrt{5}$ $\quad$ car $\Omega A = \|2 - i\| = \sqrt{5}$, $\Omega B = \sqrt{5}$ (par symétrie) $\Omega C = \|3+2i-2\| = \|1+2i\| = \sqrt{5}$ et $\Omega D = \sqrt{5}$ par symétrie
III-4-c-	Utiliser la figure de **III-2-**
III-5-	$\mathcal{A} = \frac{(AB+CD) \times AH}{2} = \frac{(2+4) \times 3}{2} = 9$ u.a.

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-1-a-	$\vec{u}$ (1 ; −1 ; 0)
IV-1-b-	E n'appartient pas à Δ car $z_E = 0 \neq 4$
IV-1-c-	$F \in \Delta$ car $\begin{cases} 0 = t+3 \\ 2 = -t-1 \\ z = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} t = -3 \\ t = -3 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$
IV-1-d-	(EF) et Δ : (EF) et (Δ) sont sécantes en F
IV-2-a-	$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{EF} = -4 + 0 + 4 = 0$ $\quad\quad$ $\vec{n}\,.\,\vec{u} = 2 - 2 + 0 = 0$
IV-2-b-	$\vec{n}$ est un vect. normal à (P)
IV-2-c-	Equation de $\mathcal{P}$: $2x + 2y + z - 8 = 0$ car (P) est de la forme $2x + 2y + z + d = 0$ or $(EF) \subset (P)$ donc $F \in (P)$ et $2x_F + 2y_F + z_F + d = 0$ soit, $4 + 4 + d = 0$ et $d = -8$
IV-3-a-	$\overrightarrow{EH}\,.\,\vec{u} = 0$ car $\overrightarrow{EH} \perp \vec{u}$ 
IV-3-b-	$x_H - y_H = 0$ car $\overrightarrow{EH}(x_H - 2 ; y_H - 2 ; z_H)$ et $\vec{u}(1 ; -1 ; 0)$ d'où $\overrightarrow{EH}\,.\,\vec{u} = 0$ et $x_H - 2 - (y_H - 2) = 0$ donc $x_H - y_H = 0$
IV-3-c-	$x_H = 1$ $\quad$ $y_H = 1$ $\quad$ $z_H = 4$ $\quad$ $\begin{cases} x_H = t+3 \\ y_H = x_H = -t-1 \\ z_H = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_H = 2 \\ y_H = x_H \\ z_H = 4 \end{cases}$
IV-4-a-	G (4 ; 6 ; 6) $\quad$ $\begin{cases} x_G = 2\times 2 \\ y_G - 2 = 2\times 2 \\ z_G - 4 = 2\times 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_G = 4 \\ y_G = 6 \\ z_G = 6 \end{cases}$
IV-4-b-	$\Delta' \begin{cases} x = t + x_G \\ y = -t + y_G \\ z = z_G \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = t + 4 \\ y = -t + 6 \\ z = 6 \end{cases}$
IV-4-c-	Les droites Δ' et (EH) sont orthogonales mais non coplanaires.