1) a) $(xe^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$ faux

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}$

$= 0$ par somme (car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$)

faux

c) faux, alors f est la fonction exponentielle

d) A et B sont incompatible si $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

c.à.d. $P(A \cap B) = 0$

or $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0$ ⟹ $\boxed{\text{VRAI}}$

2) a) $z = -6\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$= 6\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \pi\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \pi\right)\right]$

$= 6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

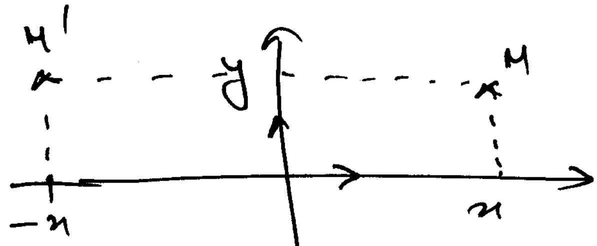
d'où $\arg z = -\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$ faux

b) posons $z = x + yi$

$\bar{z} = x - yi$

$-\bar{z} = -x + yi$

$z' = -x + yi$



donc M' est le sym. de M par rapport à l'axe des imaginaires ⟹ faux

c) (P_1) et (P_2) sont sécants si leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires

or $\left| \begin{array}{l} \vec{n}_1(4 ; 6 ; -10) \\ \vec{n}_2(-6 ; -9 ; 15) \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{l} \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3} \\ \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3} \\ \frac{-10}{15} = -\frac{2}{3} \end{array} \right.$

donc $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires donc (P_1) et (P_2) ne sont pas sécants ⟹ faux

d) si $x=2$; $y=3$ et $z=-5$ alors

$$\begin{cases} 2 = 2t+1 \\ 3 = -t-3 \\ -5 = 5t-1 \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -6 \\ t = -\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \text{faux} \quad A \notin (d)$$

3) a) $f'(0) = 1$ $\boxed{\text{VRAI}}$ coef. directeur de la tang. en A

b) $f'(1) = 1,5 \Rightarrow$ faux ; $f'(1) = 0$ (tang. horizontale en $x=1$)

c) $\boxed{\text{VRAI}}$ on voit que sur $[-1,5 ; 4]$ $(\mathscr{C}_f)$ coupe la 1ère bissectrice du repère (d'éq. $y=x$) en un seul pt.

d) $\boxed{\text{VRAI}}$ l'aire hachurée est comprise entre 2 et 4 unités d'aire.

4) a) $V(x) = x(12-x)^2 = x(x-12)(x-12)$
$= (x^2-12x)(x-12)$ $\boxed{\text{VRAI}}$

b) $f'(x) = 3x^2 - 48x + 144$
$= 3(x^2 - 16x + 48)$
$= 3[(x-8)^2 - 64 + 48]$
$= 3[(x-8)^2 - 16]$
$= 3(x-8)(x)$

x	0		8		12
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	

donc $f'(x) \leq 0$ sur $[0, 8]$

faux

c) $V(x) = x^3 - 24x^2 + 144x$
donc $V(x) = f(x)$ faux

d) si le parallélépipède rectangle est un cube alors :
$12 - x = x$ soit $x = 6$

et $V(x) = (-12 \times 6 + 36)(6-12)$
$= -36 \times (-6)$
$= 216 \text{ dm}^3$ donc $\boxed{\text{VRAI}}$

5) a) $i=0$, $n=3$, $u=1$ traitement

$u = \frac{1}{2}(1-0)-1 = -\frac{1}{2}$ $(= u_1)$

$i=1$ $u = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)-1 = -\frac{3}{4}-1 = -\frac{7}{4}$ $(= u_2)$

$i=2$ $u = \frac{1}{2}\left(-\frac{7}{4}-2\right)-1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{15}{4}\right)-1 = -\frac{15}{8}-1 = -\frac{23}{8}$ $(= u_3)$

faux

b) $\boxed{\text{VRAI}}$

c) $v_{n+1} = u_{n+1}+n+1 = \frac{1}{2}(u_n - n) - 1 + n + 1$

$= \frac{1}{2}(u_n - n) + n = \frac{1}{2}(u_n + n)$

et $v_n = u_n + n$ donc $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

donc (v_n) est une SG de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1er terme

$v_0 = u_0 = 1$ $\boxed{\text{VRAI}}$

d) $v_n = v_0 q^n = \frac{1}{2^n}$

et $u_n = v_n - n$

$= \frac{1}{2^n} - n$ faux

6) a) $a' = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$a' = \frac{1}{2} - \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ faux

b) $b' = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$b' = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ $\boxed{\text{VRAI}}$

c) $z' = |a' + b'i| = \left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \right|$

$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}+1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2+6}$

$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ $\boxed{\text{VRAI}}$

d)

$a' = a\cos\theta$

$\boxed{a' = a\cos\theta - b\sin\theta}$

$b' = a\sin\theta$

$\boxed{b' = a\sin\theta + b\cos\theta}$

$$z' = a' + b'i = a\cos\theta - b\sin\theta + i(a\sin\theta + b\cos\theta)$$

$$= a(\cos\theta + i\sin\theta) + b(-\sin\theta + i\cos\theta)$$

$$= a(\cos\theta + i\sin\theta) + bi(\cos\theta + i\sin\theta)$$

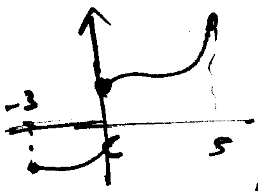
$$= a e^{i\theta} + bi\, e^{i\theta} = (a+bi)\, e^{i\theta}$$

$z' = e^{i\theta} z$ $\boxed{\text{VRAI}}$

7) a) faux, on peut avoir $z \neq 0$ et avoir $\operatorname{Re} z \neq 0$ mais $\operatorname{Im} z = 0$

b) faux, la contraposée de "si $z \in \Gamma$ alors $\operatorname{Re} z = 0$" est : "si $\operatorname{Re} z \neq 0$ alors $z \notin \Gamma$".

c) faux, il faut également qu'elle soit continue



Aucune solution

d) faux, c'est la réciproque qui est VRAI

ex: f peut être la somme de plusieurs restrictions qui admettent des primitives sur chaques intervalles, sans être continues aux pts frontières

8) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ faux

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{X \to 0} \ln X$ avec $X = \frac{1}{x^2}$

$= -\infty$ faux

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{x(1+\frac{1}{x^2})} = 0$

D'après le th. des Gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\boxed{\text{VRAI}}$

d) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} = \quad f'(\frac{\pi}{2})$

avec $f(x) = \sin x$
$f'(x) = \cos x$
$f'(\frac{\pi}{2}) = 0$

donc $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = 0$ faux

9) a) $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_2^4 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\left[x^{-\frac{1}{2}}\right]_2^4 = 2\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_2^4$

$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \sqrt{2}$; faux

b) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \left[\ln|x^2+1|\right]_0^1 = \ln 2$ $\boxed{\text{VRAI}}$

c) posons $F(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x - 2$

$F'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x$
$= x^2 e^x = f(x)$

donc F est une primitive de f $\boxed{\text{VRAI}}$

d) $\int_0^1 x^2 e^x dx = \left[(x^2 - 2x + 2)e^x\right]_0^1$

$= e - 2$; faux

10) a) $2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\boxed{\text{VRAI}}$

b) faux ; $E \in$ cercle de centre O et de rayon $R = 4$

c) $|z + 2i| = |z + 2|$ ssi $AM = BM$

donc $M \in$ médiatrice de $[AB]$ $\boxed{\text{VRAI}}$

d) $2z\bar{z} = 1$ ssi $z\bar{z} = |z|^2 = \frac{1}{2}$

et $OM = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

donc $M \in$ cercle de centre O et de rayon $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$; faux

11) a) $z_{A'} = 1 + \frac{i}{z_A} = 1 + \frac{i}{1+i} = \frac{1+2i}{1+i}$

$= \frac{(1+2i)(1-i)}{2} = \frac{1+2}{2} + \frac{1}{2}i$

$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ $\boxed{\text{VRAI}}$

b) $z' = x' + y'i = 1 + \frac{i}{x+yi} = \frac{x+(y+1)i}{x+yi}$

$= \frac{[x+(y+1)i](x-yi)}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y(y+1)+i\left(x(y+1)-yx\right)}{x^2+y^2}$

$= \frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2} + i\frac{x}{x^2+y^2}$ avec $(x;y) \neq (0;0)$

$Re(z') = \frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}$ $\boxed{\text{VRAI}}$

c) faux ; $Im\, z' = \frac{x}{x^2+y^2}$

d) $z' \in i\mathbb{R}$ ssi $Re\, z' = 0$ soit $x^2+y^2+y=0$ (et $(x,y) \neq (0,0)$)

soit $x^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$

d'où $x^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ Rem. : $(0,0)$ vérifie l'éq.

M $\in$ cercle de centre $A\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{1}{2}$

privé du pt O $\boxed{\text{VRAI}}$

12) a)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boxed{\text{VRAI}}$

b) faux ; $D =]-1, 1[$

c) $f'(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$ faux

d) $f(x) = 1$ ssi $\ln(1-x^2) = 1$ d'où $1-x^2 = e$

et $x^2 = 1-e$

impossible $S = \emptyset$ faux

13) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$

or $\left|\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{e^{x}}{x}\right)^2 \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0 \\ \qquad\qquad = \lim\limits_{X\to 0} X^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{1}{x^2} = 1 \end{array}\right.$ donc $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ faux

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$

or $\left|\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^{x}}{x}\right)^2 = \lim\limits_{X\to+\infty} X^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x^2} = 1 \end{array}\right.$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\boxed{\text{VRAI}}$

c) pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}(x^2+1) - 2x\,e^{2x}}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{2e^{2x}(x^2+1-x)}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{2e^{2x}(x^2-x+1)}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{2(x^2-x+1)}{\left(e^{-x}(x^2+1)\right)^2}$ $\boxed{\text{VRAI}}$

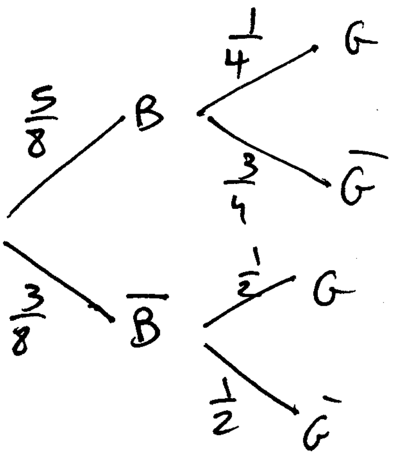
d) pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2}{\left(e^{-x}(x^2+1)\right)^2} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de : $x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

donc $f'(x) > 0$ (du signe de 2) et f est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

faux

14) a) faux, $P_{\overline{F}}(E) = 1 - P_{\overline{F}}(\overline{E})$

b)



$$P(B \cap G) = P(B) \times P_B(G)$$

$$= \frac{5}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{32} \quad \boxed{\text{VRAI}}$$

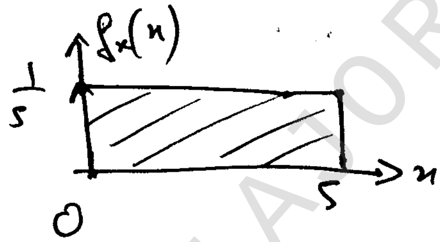
c) $G = (B \cap G) \cup (\overline{B} \cap G)$

$$P(G) = P(B \cap G) + P(\overline{B} \cap G)$$

$$= \frac{5}{32} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{32} + \frac{3}{16} = \frac{11}{32} \quad \text{faux}$$

d) $$P_G(B) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{5}{32}}{\frac{11}{32}} = \frac{5}{11} \quad \boxed{\text{VRAI}}$$

15) a)



$$P\left(1 \leq X \leq \frac{5}{2}\right) = \int_1^{\frac{5}{2}} f_X(x)\, dx = \frac{1}{5}\left[x\right]_1^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{5}{2} - 1\right) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{10} = 0{,}3 \text{, faux}$$

b) $$P(Y > c) = 1 - P(Y \leq c)$$

$$= 1 - d\int_0^c e^{-dx}\, dx$$

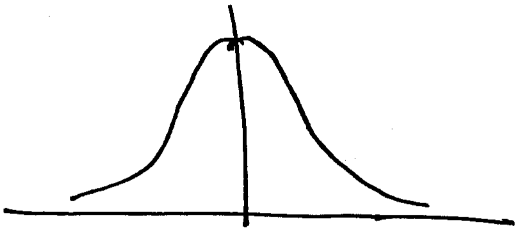
$$= 1 + \left[e^{-dx}\right]_0^c = e^{-dc}$$

$\boxed{\text{VRAI}}$

c) $P(T \leq 10) = \frac{1}{10} \int_0^{10} e^{-\frac{1}{10}t} dt = -\left[e^{-\frac{1}{10}t} \right]_0^{10}$

$= 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$ $\boxed{\text{VRAI}}$

d) $\boxed{\text{VRAI}}$



on devrait avoir $P(0 \leq Z \leq 2) < 0{,}5$

16) a) $\begin{cases} x_A = 1+2t \\ y_A = 2-t \\ z_A = -3-t \end{cases}$ $\begin{cases} -1 = 1+2t \\ 3 = 2-t \\ -2 = -3-t \end{cases}$ $\begin{cases} t=-1 \\ t=-1 \\ t=-1 \end{cases}$

donc $A \in (D)$ $\boxed{\text{VRAI}}$

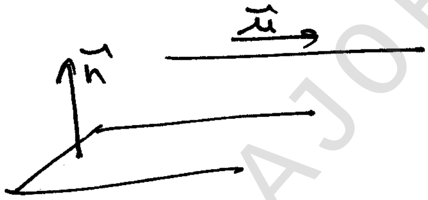
b) $(P) \cap (D)$: $1+2t+2(2-t)+3(-3-t)-2=0$

et $-4t-4=0$ d'où $t=-1$

et

$B(-1 ; 3 ; -2)$ $\boxed{\text{VRAI}}$

c)



(D') n'est pas sécante à (P) si elle est //.

cad, si $\vec{u} \perp \vec{n}$

or $\vec{u}(1 ; -2 ; 1)$ et $\vec{n}(1 ; 2 ; 3)$

et $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1-4+3=0$ donc $(D') \parallel (P)$ faux

d) $(D \cap D')$: $\begin{cases} 1+2t=k \\ 2-t=-2k+1 \\ -3-t=k \end{cases}$ $\begin{cases} k-2t=1 \\ -2k+t=1 \\ k+t=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} -3k=3 \\ -3t=3 \\ k+t=-3 \end{cases}$

$\begin{cases} k=-1 \\ t=-1 \\ k+t \neq -3 \end{cases}$ faux, (D) et (D') non coplanaires (De plus (D) n'est pas // à (D'))